

2021 年秋数学分析 1 期末模拟试题

命题: 宗语轩¹

注: 本卷满分 100 分 (其中附加题 12 分, 全卷得分不超过 100 分), 建议用时 2 小时.

一. (50 分) 基本计算和技巧的考察:

1. (5 分) 计算不定积分 $\int \arcsin x dx$.

2. (5 分) 计算不定积分 $\int \frac{1}{x^3 + 1} dx$.

3. (5 分) 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx$.

4. (5 分) 计算定积分 $\int_{-2}^2 \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$.

5. (6 分) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2021)^n + 1} \frac{1}{n}$ 的收敛性, 并说明理由.

6. (6 分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n + \sqrt{n}}{n^2 + k^2}$.

7. (8 分) 求微分方程 $y''' + y'' + 4y' + 4y = 10 \cos 2x$ 的通解.

8. (10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域及和函数.

二. (20 分) 设 $\alpha, \beta > 0$. 求:

1. (10 分) 当且仅当 α, β 满足什么关系时, 函数 $f(x) = \frac{\sin x^\alpha}{x^\beta}$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续.

2. (10 分) 当且仅当 α, β 满足什么关系时, 函数项级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ 在 $(0, \pi)$ 上一致收敛.

三. (15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 且 $f(0) \neq 0$.

1. (6 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(2x-2t)dt}$.

2. (9 分) 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n \frac{1}{1 + |x|^n} f\left(\frac{x}{n}\right) dx = 2f(0)$.

¹就读于中国科学技术大学 2019 级数学科学学院概率统计系.

个人主页: <http://home.ustc.edu.cn/~zyx240014/index.html>

四. (15分) 设 $\{a_n\}$ 是正项数列, 记 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

1. (5分) 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛. (事实上, 对 $\forall p > 1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 均收敛)

2. (10分) 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 同敛散

附加题. (12分) 设 $a, b, n \in \mathbb{N}^*$, 定义函数 $f_{a,b;n}(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$.

1. (4分) 证明: 对 $0 \leq k \leq 2n$, 函数 $f_{a,b;n}(x)$ 的 k 阶导数 $f_{a,b;n}^{(k)}(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=\frac{a}{b}$ 处的取值都是整数.

2. (4分) 假设圆周率 $\pi = \frac{a}{b}$ 是有理数, 其中 $a, b \in \mathbb{N}^*$. 证明: 对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{\pi} f_{a,b;n}(x) \sin x dx$ 是整数.

3. (4分) 证明: 圆周率 π 是无理数.