

# 2021 年秋数学分析 1 期末模拟试题

命题: 宗语轩<sup>1</sup>

注: 本卷满分 100 分 (其中附加题 12 分, 全卷得分不超过 100 分), 建议用时 2 小时.

一. (50 分) 基本计算和技巧的考察:

1. (5 分) 计算不定积分  $\int \arcsin x dx$ .

2. (5 分) 计算不定积分  $\int \frac{1}{x^3 + 1} dx$ .

3. (5 分) 计算定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx$ .

4. (5 分) 计算定积分  $\int_{-2}^2 \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$ .

5. (6 分) 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2021)^n + 1} \frac{1}{n}$  的收敛性, 并说明理由.

6. (6 分) 求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n + \sqrt{n}}{n^2 + k^2}$ .

7. (8 分) 求微分方程  $y''' + y'' + 4y' + 4y = 10 \cos 2x$  的通解.

8. (10 分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n+1)}$  的收敛域及和函数.

二. (20 分) 设  $\alpha, \beta > 0$ . 求:

1. (10 分) 当且仅当  $\alpha, \beta$  满足什么关系时, 函数  $f(x) = \frac{\sin x^\alpha}{x^\beta}$  在  $(0, +\infty)$  上一致连续.

2. (10 分) 当且仅当  $\alpha, \beta$  满足什么关系时, 函数项级数  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  在  $(0, \pi)$  上一致收敛.

三. (15 分) 设函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上连续, 且  $f(0) \neq 0$ .

1. (6 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(2x-2t)dt}$ .

2. (9 分) 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n \frac{1}{1 + |x|^n} f\left(\frac{x}{n}\right) dx = 2f(0)$ .

<sup>1</sup>就读于中国科学技术大学 2019 级数学科学学院概率统计系.

个人主页: <http://home.ustc.edu.cn/~zyx240014/index.html>

四. (15分) 设  $\{a_n\}$  是正项数列, 记  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .

1. (5分) 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$  收敛. (事实上, 对  $\forall p > 1$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$  均收敛)

2. (10分) 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$  同敛散

附加题. (12分) 设  $a, b, n \in \mathbb{N}^*$ , 定义函数  $f_{a,b;n}(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$ .

1. (4分) 证明: 对  $0 \leq k \leq 2n$ , 函数  $f_{a,b;n}(x)$  的  $k$  阶导数  $f_{a,b;n}^{(k)}(x)$  在  $x=0$  和  $x=\frac{a}{b}$  处的取值都是整数.

2. (4分) 假设圆周率  $\pi = \frac{a}{b}$  是有理数, 其中  $a, b \in \mathbb{N}^*$ . 证明: 对  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^{\pi} f_{a,b;n}(x) \sin x dx$  是整数.

3. (4分) 证明: 圆周率  $\pi$  是无理数.